GRUNDWISSEN Jahrgangsstufe 9

Quadratwurzel:

Unter der Quadratwurzel aus a (kurz „Wurzel aus a"; geschrieben $\sqrt{a}$) versteht man für $a \geq 0$ diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat gleich a ist.
Der Term unter dem Wurzelzeichen heißt Radikand, die Bestimmung des Werts der Wurzel nennt man Wurzelziehen (Radizieren).

Beispiel: $\sqrt{25} = 5$, (denn $5^2 = 25$); der Radikand ist hier 25, der Wurzelwert ist 5.
Beachte: Der Radikand und der Wurzelwert dürfen nie negativ sein!
Bei nichtnegativen Zahlen heben sich Quadrieren und Radizieren – nacheinander ausgeführt – gegenseitig auf, d.h. $\sqrt{2^2} = 2$ und $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, allgemein: $\sqrt{a^2} = a$ und $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ für $a \geq 0$

Irrationale und reelle Zahlen:

Viele Wurzelwerte sind keine rationalen Zahlen, d.h. man kann sie nicht als Bruch $\frac{p}{q}$ schreiben.

Beispielsweise ist $\sqrt{2}$ (oder $\sqrt{5}$) keine rationale Zahl, sondern eine so genannte **irrationale Zahl.**
Die Dezimalbruchdarstellung (Kommaschreibweise) einer irrationalen Zahl ist stets unendlich und nie periodisch! $\sqrt{2}$ = 1,41421356237309504880168872420 97……….hat also unendlich viele Nachkommastellen und wird niemals periodisch! **Der Taschenrechnerwert 1,414213562 für $\sqrt{2}$ ist also nicht exakt,** sondern ist ein gerundeter Wert!

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die Menge der irrationalen Zahlen bilden zusammen die **Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.**

Rechnen mit Quadratwurzeln:

Für nichtnegatives a ist $\sqrt{a^2} = a$; für beliebiges a ist $\sqrt{a^2} = |a|$ (der Wurzelwert darf nie negativ sein!)
Für nichtnegative a, b gilt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ und $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$

Ansonsten gelten auch für Wurzeln die bekannten Rechengesetze (z.B. A-, K- und D-Gesetz)
Beachte: Summenterme dürfen nicht radiziert werden, indem man jeden Summanden einzeln radiziert:
Insbesondere ist also $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$!!

Rationalmachen des Nenners:

Wurzeln im Nenner eines Bruches werden durch geeignetes Erweitern beseitigt:
Beispiel 1: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ Beispiel 2: $\frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot (3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5}) \cdot (3-\sqrt{5})} = \frac{2 \cdot (3-\sqrt{5})}{3^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{2 \cdot (3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{2 \cdot (3-\sqrt{5})}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$;

Die allgemeine Wurzel:

Unter $\sqrt[n]{a}$ (gelesen „n-te Wurzel aus a") versteht man für $n \in \mathbb{N}$ und $a \geq 0$ diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz a ist. Auch hier dürfen also Radikand und Wurzelwert nie negativ sein.
n heißt Wurzelexponent; den Wurzelexponent 2 darf man auch weglassen, also $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Allgemeine Wurzeln kann man auch als Potenzen darstellen: Es gilt: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ($n \in \mathbb{N}$ und $a \geq 0$)

Beispiele: $\sqrt[3]{64} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$ (denn $4^3 = 64$); $\sqrt[5]{20} = 20^{\frac{1}{5}}$ = irrational; Näherungswert: $\sqrt[5]{20} \approx 1{,}8206$.

Potenzgesetze für gebrochene (rationale) Exponenten:

Es gelten die gleichen Gesetze wie bei ganzzahligen Exponenten:

$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$ $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$ $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}}$ $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = (a : b)^{\frac{m}{n}}$

Beispiele: $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5} = \sqrt{5}$

$(27^2)^{-\frac{1}{3}} = 27^{2 \cdot (-\frac{1}{3})} = 27^{-\frac{2}{3}} = (3^3)^{-\frac{2}{3}} = 3^{3 \cdot (-\frac{2}{3})} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$(8 \cdot 5)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 2^1 \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{5}$

$2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} =$ kann nicht zusammengefasst werden

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} : \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} : \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$

Binomische Formeln:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ Plusformel

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$ Minusformel

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ Plusminusformel

Anwendung:

$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(2x)^2 - 2 \cdot 2x + 1^2} =$

$= \sqrt{(2x-1)^2} = |\,2x - 1\,|$

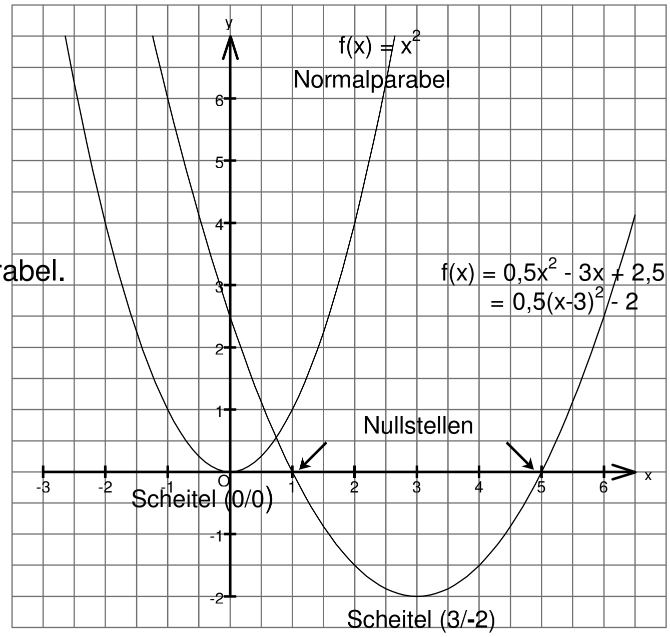
Quadratische Funktionen:

Normalform: **f(x) =** $ax^2 + bx + c$ z.B. f(x) = $0{,}5x^2 - 3x + 2{,}5$ (hier ist also a = 0,5; b = – 3 und c = 2,5)

Der Graph heißt **Parabel.** Für a>0 ist sie nach oben,für a<0 nach unten geöffnet.

Der tiefste (höchste) Punkt der Parabel heißt **Scheitel.**

Die Schnittstellen mit der x-Achse heißen **Nullstellen** der Parabel.



Spezialfall: a=1 , b und c=0, also **f(x) =x²**

Der Graph heißt Normalparabel.

Nur der Faktor a bestimmt die Form der Parabel: Für |a|>1 ist sie schlanker, für |a|<1 breiter als die Normalparabel.

Scheitelform: $f(x) = a(x - s_1)^2 + s_2$;

Hat die Parabelgleichung diese Form,so kann man den Scheitel sofort ablesen: Scheitel $S(s_1 / s_2)$

Die Normalform kann durch **quadratische Ergänzung** zur Scheitelform umgeformt werden. Im obigen Beispiel:

f(x) = $0{,}5x^2 - 3x + 2{,}5$ =

= $0{,}5(x^2 - 6x + 5)$ =

= $0{,}5(x^2 - 4x + 3^2 - 3^2 + 5)$ = $0{,}5\left[(x-3)^2 - 9 + 5\right]$ = $0{,}5\left[(x-3)^2 - 4\right]$ = $0{,}5(x-3)^2 - 2$; (Scheitelform)

Der Scheitel hat also die Koordinaten S(3/–2).

Quadratische Gleichungen:

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion f(x) = $ax^2 + bx + c$.

Eine quadratische Gleichung hat entweder zwei, eine oder keine Lösung.

Rechnerische Lösung quadratischer Gleichungen:

1. Durch Isolieren von x:

   $3x^2 – 15 = 0$;

   $3x^2 = 15$;

   $x^2 = 5$;

   $x_1 = \sqrt{5}$ oder $x_2 = -\sqrt{5}$

2. Durch Faktorisieren:

   $2x^2 – 7x = 0$

   $x(2x–7) = 0$

   x=0 oder 2x–7 = 0

   $x_1 = 0$ oder $x_2 = 3{,}5$

3. Mit Hilfe der Lösungsformel (Mitternachtsformel): $x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

z.B. $0{,}5x^2 - 3x + 2{,}5 = 0; \Rightarrow x_{1/2} = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}5}}{2 \cdot 0{,}5} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-5}}{1} = 3 \pm 2; \Rightarrow x_1 = 5;\ x_2 = 1;$

Faktorisierte Form der Parabelgleichung:

Kennt man die Nullstellen x_1 und x_2 einer Parabel f(x) = $ax^2 + bx + c$ **,**so lässt sich der Funktionsterm faktorisieren, d.h. als Produkt schreiben: f(x) = $a(x – x_1)(x – x_2)$

Beispiel: f(x) = $2x^2 + 4x - 30$; die Berechnung der Nullstellen ergibt $x_1 = 3$ und $x_2 = -5$.

Also f(x) = 2(x–3)(x– (–5)) = 2(x–3)(x+5) (faktorisierter Funktionsterm).

Parabelgleichung durch drei gegebene Punkte bestimmen:

Gesucht ist die Gleichung der Parabel f(x) $ax^2 + bx + c$ durch die Punkte A(-1/7), B(2/1) und C(4/17)

Das Einsetzen der Koordinaten der gegebenen Punkte in die Gleichung y = $ax^2 + bx + c$ liefert:

I. f(-1) = 7 => $7 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$ => 7 = a – b + c;

II f(2) = 1 => $1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$ => 1 = 4a + 2b + c;

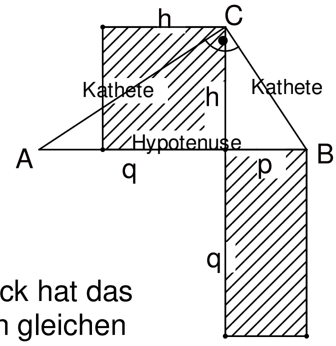
III f(4) = 17 => $17 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$ => 17 = 16a + 4b + c;

Es entsteht ein **Gleichungssystem mit drei Variablen** (Unbekannten).
Lösungsidee: Bei einer der drei Gleichungen wird eine der Unbekannten isoliert und diese dann in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt. Im obigen Beispiel: Aus Gleichung I wird c isoliert: $c = 7 - a + b$;
An Stelle von c wird nun in Gleichung II und III der Term $7 - a + b$ eingesetzt (Einsetzungsverfahren):

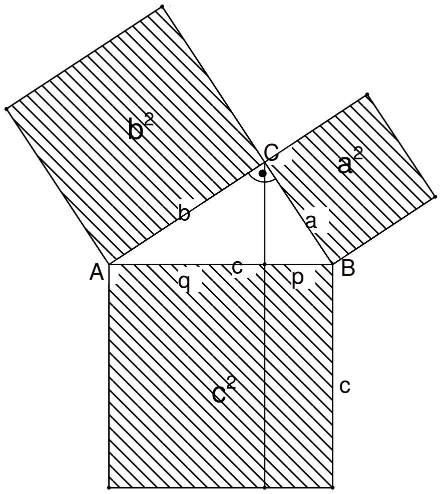
Es entstehen II´ $1 = 4a + 2b + 7 - a + b$; => $-6 = 3a + 3b$; => $-2 = a + b$;
und III´ $17 = 16a + 4b + 7 - a + b$; => $10 = 15a + 5b$; => $2 = 3a + b$;

Nun sind es nur noch 2 Gleichungen mit nur noch 2 Unbekannten, was nun wie in Jahrgangsstufe 8 gelöst werden kann. Man erhält dann $a = 2$ und $b = -4$ und damit auch $c = 7 - a + b = 7 - 2 + (-4) = 1$;
Die gesuchte Parabelgleichung lautet also $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$;

Sätze im rechtwinkligen Dreieck:



Höhensatz:
Bei einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Höhe den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten: $\mathbf{h^2 = p \cdot q}$ (siehe Skizze rechts)



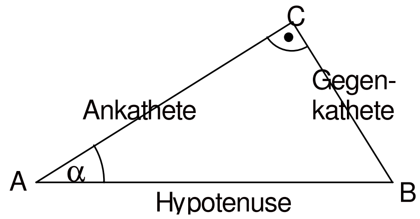
Kathetensatz:
Bei einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über einer Kathete den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus dem anliegenden Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse: $\mathbf{a^2 = p \cdot c}$ und $\mathbf{b^2 = q \cdot c}$;

Satz des Pythagoras:
Bei einem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den beiden Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse:

$$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$$

Auch der Kehrsatz des Satzes von Pythagoras gilt:
Wenn für die Seitenlängen eines Dreiecks gilt: $a^2 + b^2 = c^2$ dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck:



Tangens von $\alpha = \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

Sinus von $\alpha = \sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

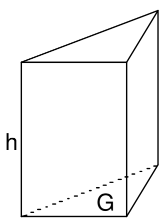
Kosinus von $\alpha = \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

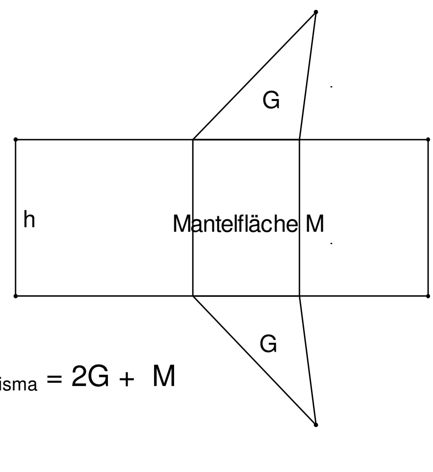
Zusammenhänge: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$; $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$;

Wichtige Sinuswerte $\sin 0° = 0$; $\sin 30° = \frac{1}{2}$; $\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\sin 90° = 1$

Prisma:

Volumen V = Grundfläche G mal Höhe h
$V_{Prisma} = G \cdot h$

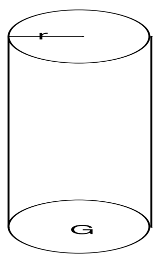


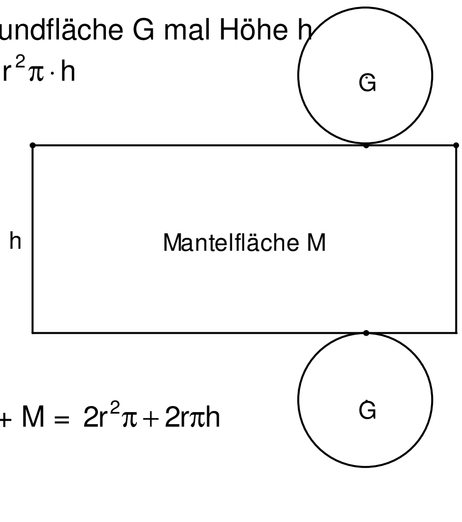


Oberfläche $O_{Prisma} = 2G + M$

Zylinder:

Volumen V = Grundfläche G mal Höhe h
$V_{Zylinder} = G \cdot h = r^2\pi \cdot h$

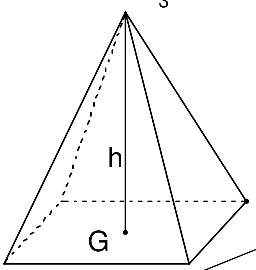


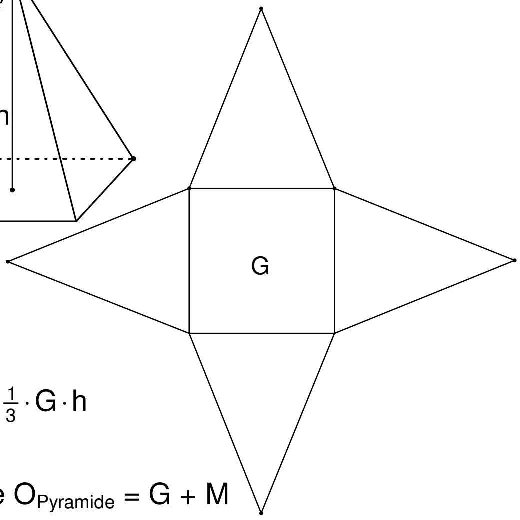


$O_{Zylinder} = 2G + M = 2r^2\pi + 2r\pi h$

Pyramide:

Volumen V = $\frac{1}{3}$ Grundfläche G mal Höhe h

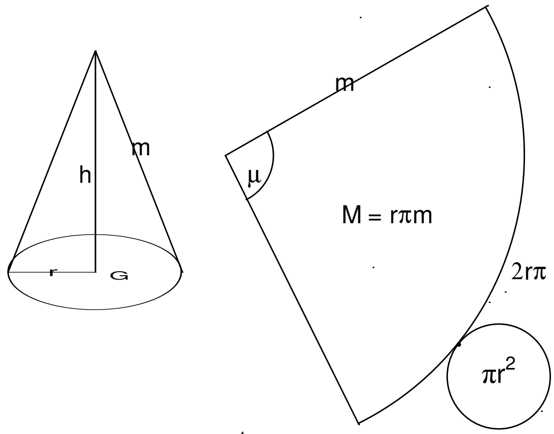




$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Oberfläche $O_{Pyramide}$ = G + M

Kegel:



Volumen V = $\frac{1}{3}$ Grundfläche G mal Höhe h

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} r^2 \pi h$

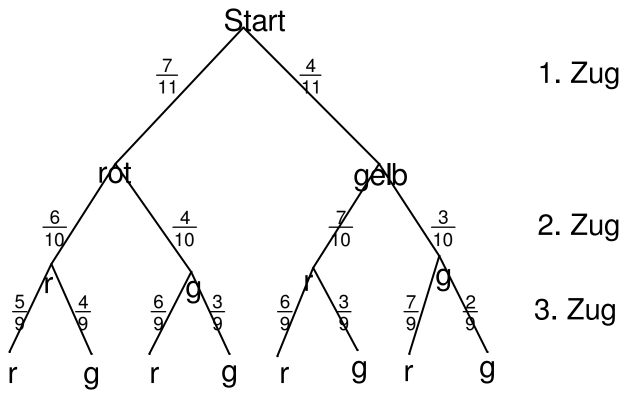
Oberfläche O_{Kegel} = G + M = $r^2\pi + r\pi m$

$\mu = \frac{r}{m} \cdot 360°$

Baumdiagramme, Pfadregeln:

Ein mehrstufiges Zufallsexperiment kann durch ein Baumdiagramm veranschaulicht werden.

Beispiel: Aus einer Tüte mit 7 roten und 4 gelben Gummibärchen werden 3 Gummibärchen ohne Zurücklegen gezogen:



Es gibt 8 mögliche Ergebnisse, nämlich {rrr, rrg, rgr, rgg, grr, grg, ggr, ggg}
Beachte: Die einzelnen Ergebnisse sind nicht alle gleich wahrscheinlich!
Die Wahrscheinlichkeit beim 1. Zug ein rotes Gummibärchen zu erhalten beträgt $\frac{7}{11}$, da insgesamt 11 Bärchen in der Tüte sind; 7 davon sind rot. Alle Zweige des Baumdiagramms werden mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten beschriftet. Beachte dabei, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten an Zweigen, die am gleichen Punkt beginnen, stets 1 (= 100 %) ergibt.
z. B. $\frac{6}{10} + \frac{4}{10} = \frac{10}{10} = 1$
Die Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse lassen sich mit Hilfe der **Pfadregeln** berechnen:

1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem **Produkt** der Wahrscheinlichkeiten, auf dem (Gesamt-)Pfad, der vom Start zu diesem Ergebnis führt.

2. Pfadregel: Gehören zu einem Ereignis mehrere Ergebnisse, so werden die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse **addiert.**

1. Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „3 rote Bärchen werden gezogen“ beträgt
$P(\text{3 rote}) = P(rrr) = \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{7}{33} \approx 21{,}2\%$;

2. Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau 2 gelbe Bärchen werden gezogen“ ist
$P(\text{genau 2 gelbe}) = P(rgg;grg;ggr) = \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = 3 \cdot \frac{14}{165} = \frac{14}{55} \approx 25{,}5\%$.