GRUNDWISSEN Jahrgangsstufe 8

Proportionalität:

Besondere Zusammenhänge zwischen zwei Größen.

Direkte Proportionalität

Beispiel:

Anzahl der Eiskugeln – Gesamtpreis (Kugelpreis 80 ct)

allgemein: x – y

Zuordnung: f: $x \mapsto 80 \cdot x$ allgemein: f: $x \mapsto k \cdot x$

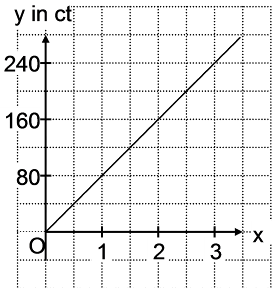
Wenn man den x – Wert verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht,..., ver-k-facht, dann verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht,..., ver-k-facht sich auch der y – Wert.

Rechnerische Überprüfung:

$k = \frac{y}{x} = \frac{80}{1} = \frac{160}{2} = ... = 80$

(Quotientengleichheit)

Der zugehörige Graph ist eine Ursprungsgerade.



Indirekte Proportionalität

Beispiel:

Anzahl von Schülern – Bonbons pro Schüler (bei 36 B.)

allgemein: x – y

Zuordnung: f: $x \mapsto \frac{36}{x}$ allgemein: f: $x \mapsto \frac{a}{x}$

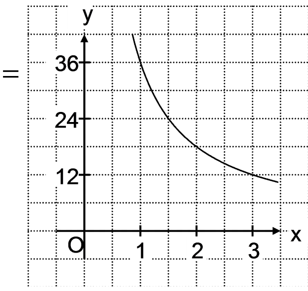
Wenn man den x – Wert verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht,..., ver-k-facht, dann halbiert, drittelt, viertelt,..., k-telt sich auch der y – Wert.

Rechnerische Überprüfung:

$a = x \cdot y = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = ... =$

(Produktgleichheit)

Der zugehörige Graph ist eine Hyperbel.



Funktion:

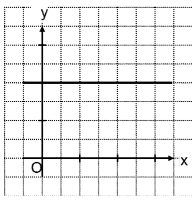
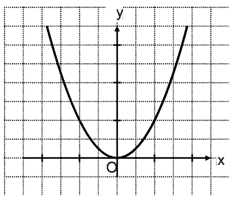
Eine Funktion f ist eine **eindeutige** Zuordnung: Jedem x-Wert wird genau ein y-Wert zugeordnet. f: $x \mapsto y$

Der von x abhängige Wert **f (x)** bzw. **y** heißt **Funktionswert**.

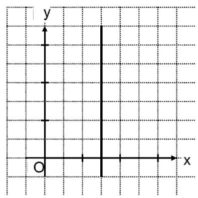
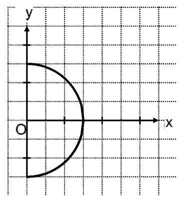
Definitionsmenge D_f: Menge aller zulässigen Werte für x Wertemenge W_f: Menge aller Funktionswerte

Da die Zuordnung eindeutig ist, liegen beim Graphen der Funktion nie Punkte übereinander:

Funktionen:

keine Funktionen:

Lineare Funktionen (Gleichung einer Geraden):

Funktionsgleichung f: $f(x) = mx + t$; $m, t \in \mathbb{Q}$; $D_f = \mathbb{Q}$

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade g (mit der Gleichung g: $y = mx + t$)

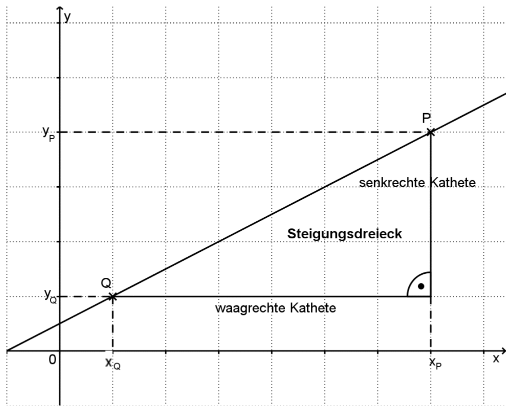
m ist die Steigung der Geraden g; t ist der y-Achsenabschnitt

Nullstelle x_N: $f(x_N) = 0$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $S_x(x_N / 0)$;

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 / t)$

Verläuft die Gerade durch 2 Punkte $P(x_P / y_P)$ und $Q(x_Q / y_Q)$; $x_P \neq x_Q$, so gilt für die Geradensteigung $m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{\text{senkrechte Kathete}}{\text{waagrechte Kathete}}$



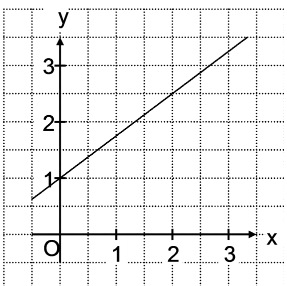
$g \parallel h \Rightarrow m_g = m_h$ $\qquad g \perp h \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

Beispiele: $f(x) = 3x + 2$ $\quad m = 3;\ t = 2$ $\quad f(x_N) = 3x_N + 2 = 0 \Rightarrow 3x_N = -2 \Rightarrow x_N = -\frac{2}{3}$ $\quad S_x(-\frac{2}{3} / 0);\ S_y(0 / 2)$

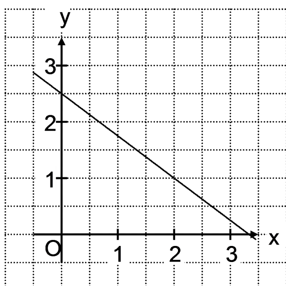
Bestimme die Gleichung der Geraden durch P (2/-3) und Q (1/4): $m = \frac{4-(-3)}{1-2} = \frac{7}{-1} = -7 \Rightarrow y = -7x + t$

Einsetzen von z.B. P in die Gleichung $-3 = -7 \cdot 2 + t \quad \Rightarrow -3 = -14 + t \mid +14 \Rightarrow t = 11 \Rightarrow y = -7x + 11$

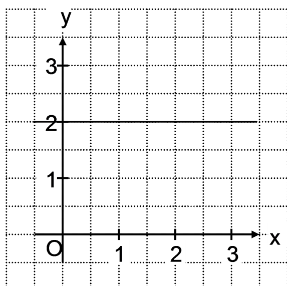
Es gibt: steigende Geraden: $m > 0$ fallende Geraden: $m < 0$ zur x-Achse parallele Geraden: $m = 0$



z.B. $y = 0{,}75x + 1$



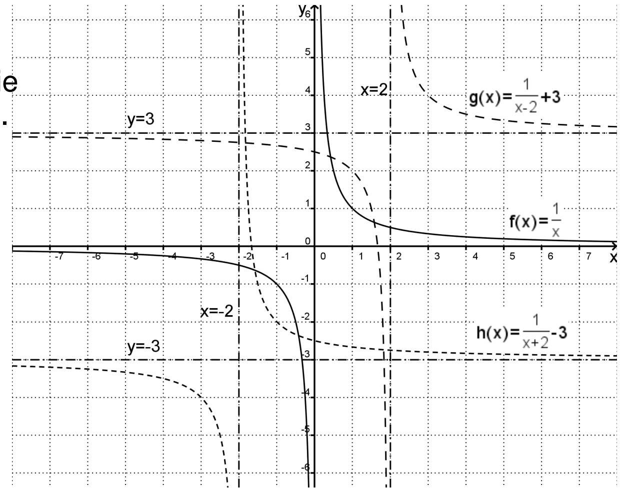
z.B. $y = -0{,}75x + 2{,}5$



z.B. $y = 2$

Gebrochenrationale Funktionen (Bruchfunktionen):

Der Funktionsterm einer gebrochen–rationalen Funktion ist ein Bruchterm, der die Variable mindestens im Nenner enthält. Für die Definitionsmenge muss man alle Zahlen ausschließen für die der **Nenner**term gleich Null wird (siehe Rechnen mit Bruchtermen). Die Nullstellen des Nennerterms heißen **Definitionslücken** der Funktion. Der Graph der Funktion ist eine Hyperbel.



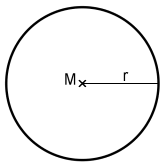
$f(x)=\frac{1}{x-a}+b$ mit $D_f=\mathbb{Q}\setminus\{a\}$

Waagrechte Asymptote y = b
Senkrechte Asymptote x = a
Verschiebung des Funktionsgraphen:
für a > 0: um a nach links
für a < 0: um a nach rechts
für b > 0: um b nach oben
für b < 0: um b nach unten

Umfang und Flächeninhalt eines Kreises:

Umfang U eines Kreises mit Radius r: U = 2πr

Flächeninhalt A eines Kreises mit Radius r: $A = \pi r^2$



Beispiel: r = 13 cm

$\Rightarrow U = 2\cdot\pi\cdot 13\,\text{cm} \approx 81{,}68\,\text{cm}$

$A=\pi\cdot(13\,\text{cm})^2 \approx 530{,}93\,\text{cm}^2$

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten:

Für $a\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ und $n\in\mathbb{Z}$ gilt: $a^0=1$ und $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ Der Term 0^0 ist nicht definiert.

Beispiele: $3^0=1$; $2^{-6}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$; $\left(\frac{5}{7}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{1}{\frac{25}{49}}=1:\frac{25}{49}=1\cdot\frac{49}{25}=\frac{49}{25}=\left(\frac{7}{5}\right)^2$;

Rechnen mit Potenzen für $a\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ und $n, m\in\mathbb{Z}$

- Multiplizieren und Dividieren von Potenzen **mit gleicher Basis**:
  $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$; $\frac{a^n}{a^m}=a^n:a^m=a^{n-m}$

Beispiele: $5^2\cdot 5^4=5^{2+4}=5^6$; $13^4\cdot 13^{-7}=13^{4+(-7)}=13^{-3}$; $7^{14}:7^{12}=7^{14-12}=7^2$; $\frac{4^5}{4^{-3}}=4^{5-(-3)}=4^8$

- Multiplizieren und Dividieren von Potenzen **mit gleichen Exponenten**:
  $a^n\cdot b^n=(ab)^n$; $a^n:b^n=(a:b)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

Beispiele: $4^2\cdot 5^2=(4\cdot 5)^2=20^2$; $4^{19}:2^{19}=\left(\frac{4}{2}\right)^{19}=2^{19}$; $\frac{8^{-2}}{6^{-2}}=\left(\frac{8}{6}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$

- Potenzieren einer Potenz:
  $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$ Beispiele: $(7^2)^5=7^{10}$; $(2^{-8})^{-9}=2^{72}$
- Addition und Subtraktion von Potenzen: Potenzen können nur addiert bzw. subtrahiert werden, wenn sie in Basis **und** Exponent übereinstimmen. Beispiele: $a^3+a^3=2a^3$; $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{2}{b^2}$; $z^5\cdot z^{-2}+z^{-3}=z^3+z^{-3}$;

$$-4x^6-x^{-1}+x^4\cdot x^{-5}-(-2x^2)^3=-4x^6-x^{-1}+x^{4-5}-(-8x^6)=-5x^6-x^{-1}+x^{-1}+8x^6=3x^6$$

Gleitkommadarstellung:

Wissenschaftliche Schreibweise mit Hilfe von Zehnerpotenzen: $a\cdot 10^n$; $a\in[1;10[$; $n\in\mathbb{Z}$

Beispiele: $0{,}28=2{,}8\cdot 10^{-1}$; $0{,}00000078=7{,}8\cdot 10^{-7}$; $1200000000=1{,}2\cdot 10^9$

Rechnen mit Bruchtermen:

Tritt eine Variable auch im Nennerterm eines Bruchs auf, so spricht man von einem **Bruchterm.**
Definitionsmenge: Alle Zahlen für die der Nennerterm gleich Null wird, muss man aus der Definitionsmenge ausschließen. Beispiele: $\frac{1}{x}$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$; $\frac{x}{(1-x)(x+3)}$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{-3;1\}$; $\frac{x-3}{x^2+2}$ $D=\mathbb{Q}$

Erweitern: Zähler und Nenner werden mit der gleichen Zahl (≠ 0) (bzw. dem gleichen Term) multipliziert.

Beispiele: $\frac{1}{x}=\frac{2}{2x}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$; $\frac{3}{x+2}=\frac{3x}{x(x+2)}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{-2;0\}$ $\frac{7+x}{5}=\frac{(7+x)^2}{5(7+x)}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{-7\}$

Kürzen: Zähler **und** Nenner werden durch die gleiche Zahl (bzw. dem gleichen Term) dividiert.

Beispiele: $\frac{9x}{9(x+3)}=\frac{x}{x+3}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{-3\}$; $\frac{8x}{x(x+1)}=\frac{8}{x+1}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{-1;0\}$; $\frac{(x+2)^2}{x+2}=x+2$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{-2\}$; $\frac{x(x-13)}{5(13-x)}=\frac{-x(13-x)}{5(13-x)}=-\frac{x}{5}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{13\}$;

Merke: *Kürze nie aus Differenzen und Summen!* Zähler und Nenner zuerst faktorisieren: $\frac{2x+2}{x^2+x}=\frac{2(x+1)}{x(x+1)}=\frac{2}{x}$

Addition und Subtraktion: Bruchterme mit verschiedenen Nennern (ungleichnamig) werden auf den gleichen Hauptnenner gebracht (gleichnamig). Dann addiert bzw. subtrahiert man die Zähler und behält die Nenner bei.

Beispiele: $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$; $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y}{xy}-\frac{x}{xy}=\frac{y-x}{xy}$; $\frac{4}{3z}+\frac{5}{7z^2}=\frac{28z}{21z^2}+\frac{15}{21z^2}=\frac{28z+15}{21z^2}$;

$\frac{a-6}{2a-8}-\frac{a-3}{4-a}=\frac{a-6}{2(a-4)}-\frac{a-3}{-(a-4)}=\frac{a-6}{2(a-4)}+\frac{a-3}{a-4}=\frac{a-6}{2(a-4)}+\frac{2(a-3)}{2(a-4)}=\frac{a-6+2a-6}{2(a-4)}=\frac{3a-12}{2(a-4)}=\frac{3(a-4)}{2(a-4)}=\frac{3}{2}$

Multiplikation: Man multipliziert die beiden Zähler und die beiden Nenner. Beispiele: $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{4}=\frac{x^2}{12}$; $\frac{x-7}{x}\cdot\frac{5}{x-7}=\frac{(x-7)\cdot 5}{x(x-7)}=\frac{5}{x}$

Division: Man multipliziert den ersten Bruchterm mit dem Kehrbruch des zweiten Bruchterms.

Beispiele: $\frac{2}{a}:\frac{4}{b}=\frac{2}{a}\cdot\frac{b}{4}=\frac{2b}{4a}=\frac{b}{2a}$; $\frac{x}{y^2}:\frac{1}{xy}=\frac{x}{y^2}\cdot\frac{xy}{1}=\frac{x^2}{y}$; $\frac{2x^2-5x}{48x}:\frac{5-2x}{24x^2}=\frac{x(2x-5)}{48x}\cdot\frac{24x^2}{5-2x}=\frac{-x(5-2x)\cdot 24x^2}{48x(5-2x)}=\frac{-x^2}{2}=-\frac{x^2}{2}$

Bruchgleichungen:

Mindestens eine Variable tritt im Nenner auf. — Beispiel: $\frac{6}{2x}=\frac{1}{x-2}$

- Definitionsmenge bestimmen — $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;2\}$
- wenn möglich: einzelne Bruchterme kürzen — $\frac{3}{x}=\frac{1}{x-2}$
- mit dem Hauptnenner multiplizieren — $\frac{3}{x}=\frac{1}{x-2}\ \big|\cdot x(x-2)$
- vereinfachte Gleichung lösen — $3(x-2)=x\Rightarrow 3x-6=x\Rightarrow 2x=6$
- überprüfen, ob die Lösung zur Definitionsmenge gehört — $\Rightarrow x=3\in D$
- Lösungsmenge angeben — $L=\{3\}$

Beispiel **Formeln auflösen**: $R=\frac{U}{I}\ \big|\cdot I\Rightarrow I\cdot R=U\ \big|:R\Rightarrow I=\frac{U}{R}$ genauso z.B. : $v=\frac{s}{t}$; $D=\frac{F}{s}$; $g=\frac{G}{m}$;

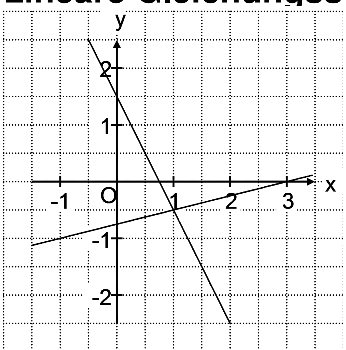
$\frac{1}{f}=\frac{1}{g}+\frac{1}{b}\ \big|\cdot fgb\Rightarrow gb=fb+fg\Rightarrow gb-fb=fg\Rightarrow b(g-f)=fg\Rightarrow b=\frac{fg}{g-f}$

Lineare Ungleichungen:

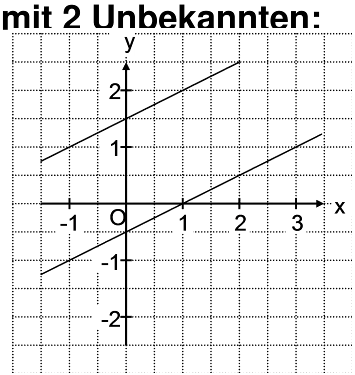
Es gelten dieselben Regeln wie bei linearen Gleichungen. **Beachte:** Beim Multiplizieren oder beim Dividieren mit einer **negativen Zahl** wird das Ungleichheitszeichen umgedreht.

Beispiel: $-7x<21\ \big|:(-7)\Rightarrow x>-3\Rightarrow$ $L=\{x|x>-3\}=\,]-3;\infty[$ (Intervallschreibweise)

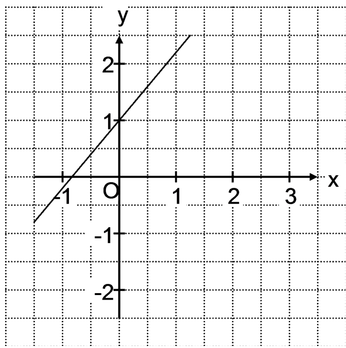
Lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten:



eine Lösung
L = {(1; -0,5)}



keine Lösung
L = {( )}



unendlich viele Lösungen
L = {(x; y)| y = 1,2 x + 1}

Gleichsetzungsverfahren (günstig, wenn beide Gleichungen bereits nach einer Variablen aufgelöst sind)

I. y = 3x + 7,5 — „II“ = „I“ ⇒3x + 7,5 = - 2x + 22,5 | + 2x – 7,5 ⇒5x = 15 ⇒x = 3

II. y = - 2x + 22,5 — in I. einsetzen: y = 3 · 3 + 7,5 = 9 + 7,5 = 16,5 ⇒L = {(3; 16,5)}

Einsetzverfahren (günstig, wenn eine der Gleichungen bereits nach einer Variablen aufgelöst ist)

I. x + 2y = 2 — „II“ in „I“⇒3,6 – 1,2y + 2y = 2 ⇒ 3,6 + 0,8y = 2 ⇒ 0,8y = -1,6 | : 0,8 ⇒ y = -2

II. x = 3,6 – 1,2y — in II. einsetzen: x = 3,6 – 1,2 · (-2) = 3,6 + 2,4 = 6 ⇒ L = {(6; -2)}

Additionsverfahren (alternativ)

I. 4x + 3y = 23 — x = 5

II. 2x – 3y = 7 — in I. einsetzen: 4 · 5 + 3y = 23 ⇒ 3y = 3 ⇒y = 1 ⇒ L = {(5; 1)}

I+II 6x = 30 | : 6

Ergebnis, Ergebnisraum, Ereignis:

Zufallsexperimente sind Vorgänge, deren Ergebnisse **zufällig**, also nicht vorhersagbar sind. (z. B. : Würfeln mit einem Spielwürfel, Ziehen der Lottozahlen, Drehen eines Glücksrads) — Beispiel: Werfen eines Würfels

Ergebnisraum (Ergebnismenge) Ω ist die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments. — $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

Ereignis A: Jede Teilmenge A der Ergebnismenge Ω heißt Ereignis. Man sagt: Das Ereignis A ist eingetreten, wenn bei der Durchführung eines Zufallsexperiments ein Ergebnis aus A auftritt.
A: „Die Augenzahl ist kleiner gleich 4.“ $A = \{1;2;3;4\} \subset \Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
A tritt ein, wenn z.B. 1 gewürfelt wird.

günstiges Ereignis: Alle Ergebnisse, die zum Ereignis A gehören. Günstige Ereignisse: 1, 2, 3, 4

Elementarereignis: Ereignis mit genau einem Element aus Ω B: „Es wird eine 5 geworfen“ $B = \{5\}$

unmögliches Ereignis: Ereignis mit keinem Element aus Ω C: „Die gewürfelte Zahl ist größer 10.“ $C = \{\ \}$

sicheres Ereignis: Ereignis mit allen Elementen aus Ω D: „Eine natürliche Zahl kleiner als 7.“ $D = \Omega$

Gegenereignis $\overline{A}$: besteht aus allen Ergebnissen von Ω, die nicht zu A gehören. ($\overline{A} = \Omega \setminus A$)
$\overline{A} = \{5;6\}$; $\overline{A}$: „Die Augenzahl ist größer 4.“

Wahrscheinlichkeit:

Relative Häufigkeit h des Ereignisses A: $h(A) = \frac{\text{Anzahl der Treffer } z}{\text{Anzahl der Ergebnisse } n} = \frac{z}{n}$

Beispiel: Bei 50-maligem Würfeln tritt 15-mal 6 auf: $h(A) = \frac{15}{50} = 0{,}3 = 30\%$ A: „6 tritt auf“

Wahrscheinlichkeit P (A) eines Ereignisses: Bei einem Zufallsexperiment wird jedem Ereignis A als Wahrscheinlichkeit P (A) eine Zahl zwischen 0 und 1 zugeordnet. Es gilt: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Beispiel: Würfeln $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$; A: „Augenzahl ist gerade“: $A = \{2;4;6\}$; $P(A) = 0{,}5$; $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$
B: „Augenzahl ist -1“: $B = \{\ \}$; $P(B) = 0$; C: „Augenzahl ist eine natürliche Zahl“: $C = \Omega$; $P(C) = 1$

Laplace Experiment:

Laplace Experimente sind Zufallsexperimente bei denen jedes der möglichen Ergebnisse gleich wahrscheinlich ist. Beispiel: Werfen einer Münze, Werfen eines Würfels, kein LPE: Werfen eines Reißnagels
Wahrscheinlichkeit P (E) für ein Ereignis E eines Laplace-Experiments: $P(E) = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } E}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega}$

Beispiel: Würfeln: $P(\text{"ungerade Zahl"}) = \frac{3}{6} = 0{,}5$; $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$; $E = \{1;3;5\}$

Strahlensätze:

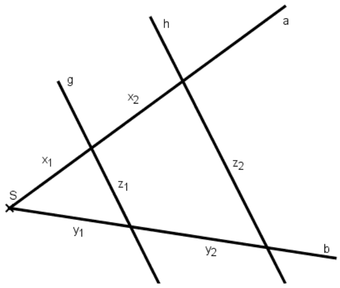
Werden zwei Geraden a und b („Strahlen“), die sich in einem Punkt S schneiden, von zwei Parallelen g und h (außerhalb S) geschnitten, so gilt:

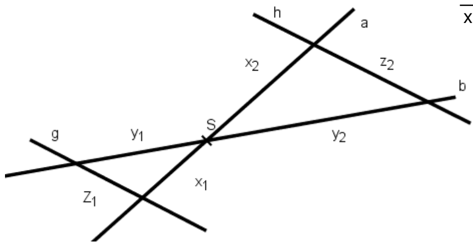
a) Je zwei Abschnitte auf der Gerade a („Strahl“) verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf der Gerade b („Strahl“): $\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y}$; $\frac{x_2}{x} = \frac{y_2}{y}$; $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$

b) Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die Entfernungen ihrer Endpunkte zu S auf den Strahlen:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y}$

$x = x_1 + x_2$
$y = y_1 + y_2$





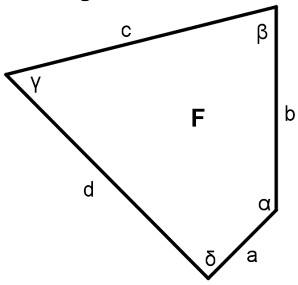
$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

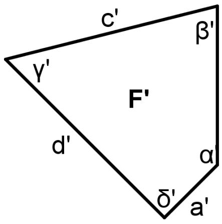
Ähnlichkeit:

Wird eine Figur im Maßstab k ($k \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{1\}$) vergrößert bzw. verkleinert erhält man ähnliche Figuren.
Ausgangsfigur F und Bildfigur F’ erfüllen immer folgende Eigenschaften:

- alle entsprechenden Winkel sind gleich groß: α = α’; β = β’; ...
- alle Verhältnisse entsprechender Streckenlängen sind gleich groß: $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \ldots (= k)$
- der Flächeninhalt A’ der Bildfigur ist k^2-mal so groß wie der Flächeninhalt A der Ausgangsfigur: $A' = k^2 \cdot A$

0 < k < 1: F’ ist kleiner als F
k = 1: F’ und F sind kongruent
k > 1: F’ ist größer als F





Ähnlichkeitssätze für Dreiecke:

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie

a) im Verhältnis aller entsprechender Seitenlängen übereinstimmen.
b) im Verhältnis zweier Seiten und den Zwischenwinkel übereinstimmen.
c) in zwei Winkeln übereinstimmen.
d) im Verhältnis zweier Seiten und den Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

Die Kongruenz ist ein Spezialfall der Ähnlichkeit.