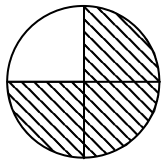
GRUNDWISSEN Jahrgangsstufe 6

Brüche

$\frac{3}{4}$ ist ein Bruch mit dem Zähler 3 und dem Nenner 4; der waagerechte Strich heißt Bruchstrich.

Bedeutung des Bruches $\frac{3}{4}$: ein Ganzes wird in vier Teile geteilt; man nimmt drei davon:



$\frac{3}{4}$

Hauptsatz der Bruchrechnung:
Das Ergebnis der Division a : b ist der Bruch $\frac{a}{b}$. Der Bruchstrich bedeutet das Gleiche wie das „:“-Zeichen.

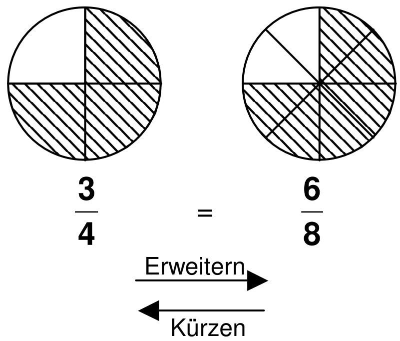
Ein unechter Bruch ist ein Bruch dessen Zähler ist größer als der Nenner, z.B. $\frac{3}{2}$ oder $\frac{11}{4}$

Ein unechter Bruch kann auch als **gemischte Zahl** geschrieben werden: $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$; $\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$

Jeder Bruch hat einen Platz auf der Zahlengeraden. Brüche mit dem gleichen Platz haben den gleichen Wert, sie können dabei aber verschiedene Namen haben, z.B. $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

Erweitern: Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multiplizieren;
z.B. $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{6}{8}$

Kürzen: Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl ($\neq 0$) dividieren,
z.B. $\frac{6}{8}=\frac{6:2}{8:2}=\frac{3}{4}$



Brüche ändern ihren Wert beim Erweitern oder Kürzen nicht!

Um einen Bruch kürzen zu können, muss man eine Zahl finden, durch die sich der Zähler und der Nenner teilen lässt. Sehr nützlich dabei sind die
Teilbarkeitsregeln:
Eine Zahl ist durch
2 teilbar, wenn sie mit einer geraden Ziffer endet (z.B. 2 | 1254)
5 teilbar, wenn sie mit 0 oder 5 endet (z.B. 5 | 3245)
3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist (z.B. 3 | 9231, denn die Quersumme ist 9+2+3+1=15)
9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist (z.B. 9 | 7632, denn die Quersumme ist 7+6+3+2=18)

Kürzen bei Produkten: Sind Zähler und Nenner eines Bruches Produkte, so dürfen gemeinsame Faktoren gekürzt werden, ohne vorher auszumultiplizieren. Beispiel: $\frac{7\cdot 13\cdot 100}{120\cdot 13\cdot 7}=\frac{100}{120}=\frac{10\cdot 10}{10\cdot 12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$;
Beachte: gekürzt werden darf dabei **nur bei Produkten** im Zähler und Nenner!
Aufgaben: Kürze so weit wie möglich $\frac{28}{70}=\ldots\frac{2}{5}$; $\frac{255}{765}=\ldots\frac{1}{3}$; $\frac{222}{74}=\ldots 3$; $\frac{15\cdot 99\cdot 14}{22\cdot 63\cdot 60}=\ldots\frac{1}{4}$;

Brüche miteinander vergleichen:

Will man z.B. $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$ und $\frac{2}{3}$ nach ihrer Größe vergleichen, so muss man alle drei Brüche durch Erweitern auf den gleichen Nenner bringen; man sagt auch: die Brüche werden **gleichnamig** gemacht.
Zuerst braucht man dazu ein gemeinsames Vielfaches der Nenner 5, 10 und 3. Möglich wäre $3\cdot 5\cdot 10=150$, besser ist aber 30, das so genannte **k**leinste **g**emeinsame **V**ielfache (kgV) der Zahlen 5, 10 und 3.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{5}=\frac{18}{30}\\ \frac{7}{10}=\frac{21}{30}\\ \frac{2}{3}=\frac{20}{30}\end{array}\right\}\ \text{Es gilt: } \frac{18}{30}<\frac{20}{30}<\frac{21}{30},\quad \text{also ist } \frac{3}{5}<\frac{2}{3}<\frac{7}{10}$$

Der Nenner 30, der das kgV der Nenner 5, 10 und 3 ist, heißt **Hauptnenner**.

Rechnen mit Brüchen:

Addieren/Subtr.: 1. Die Brüche gleichnamig machen.
2. Nur die Zähler werden addiert bzw. subtrahiert.

Beispiel1: $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$; Beispiel2: $-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=-\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{-4+1}{6}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$;

Multiplizieren: Bruch mit ganzer Zahl: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$ (Zähler mit der Zahl multiplizieren)

Bruch mit Bruch: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ (Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner)

Dividieren: Bruch durch ganze Zahl: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$ (Nenner mit der Zahl multiplizieren)

Ganze Zahl durch Bruch: $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$

Bruch durch Bruch: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

(mit dem Kehrwert des Divisors multiplizieren)

Beachte: Gemischte Zahlen müssen vor dem Multiplizieren und Dividieren in unechte Brüche verwandelt werden, z.B. $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 2} = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}$;

Verbindung der Rechenarten: Es gilt wie üblich : Klammer zuerst; Potenz vor Punkt vor Strich.

Beispiel: $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot 5 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 : \frac{3}{4} = \left(\frac{4}{12} - \frac{3}{12}\right) \cdot 5 - \frac{1}{4} : \frac{3}{4} = \frac{1}{12} \cdot 5 - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12} - \frac{4}{12} = \frac{1}{12}$;

Berechnung von Bruchteilen: $\frac{3}{8}$ von 48 kg = $\frac{3}{8} \cdot 48$ kg = $\frac{3 \cdot 48}{8}$ kg = $\frac{3 \cdot 6}{1}$ kg = 18 kg

Also: Bruchteil von 48kg ist gleich Bruchteil mal 48kg.

Bruchzahlen in Dezimalschreibweise (Dezimalbrüche):

Bei einem Dezimalbruch stehen auf der ersten Stelle nach dem Komma die Zehntel auf der zweiten die Hundertstel, auf der dritten die Tausendstel....... $0{,}017 = \frac{17}{1000}$; $0{,}0008 = \frac{8}{10000}$;

Rechnen mit <u>endlichen</u> Dezimalbrüchen:

Addieren/Subtr.: Untereinander schreiben, so dass Komma unter Komma steht und stellenweise rechnen.

Multiplizieren: Ohne Rücksicht auf die Kommas multiplizieren und dann das Komma im Ergebnis so setzen, dass dieses so viele Stellen hat wie die Faktoren zusammen: $0{,}03 \cdot 1{,}5 = 0{,}045$

Beim Multiplizieren mit einer Stufenzahl: das Komma um so viele Stellen nach rechts schieben, wie die Stufenzahl Nullen hat: $1{,}5 \cdot 1000 = 1500$; $0{,}0235 \cdot 100 = 2{,}35$

Dividieren: Zuerst bei Dividend und Divisor das Komma so weit nach rechts verschieben (Erweitern), bis der Divisor eine ganze Zahl ist; beim Dividieren vor dem Herunterholen der ersten Nachkommastelle beim Ergebnis das Komma setzen: $0{,}016 : 0{,}32 = 1{,}6 : 32 = 0{,}05$

Beim Dividieren durch eine Stufenzahl: das Komma um so viele Stellen nach links schieben, wie die Stufenzahl Nullen hat: $2{,}5 : 100 = 0{,}025$; $123{,}45 : 10 = 12{,}345$

Beispiel: $1{,}2 + 3{,}6 : 0{,}18 - 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 1{,}2 + 360 : 18 - 0{,}48 = 1{,}2 + 20 - 0{,}48 = 21{,}2 - 0{,}48 = 20{,}72$;

Umwandeln von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche

durch schriftliches Dividieren, z.B. $\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0{,}125$

Geht die Division nicht auf, so erhält man einen unendlichen, periodischen Dezimalbruch, z.B. $\frac{1}{6} = 1 : 6 = 0{,}1666.... = 0{,}1\overline{6}$.

Enthält die Primfaktorzerlegung des Nenners eines vollständig gekürzten Bruches nur die Primfaktoren 2 oder auch 5, so ergibt sich ein endlicher Dezimalbruch, andernfalls ein unendlicher.

Umwandeln von periodischen Dezimalbrüchen in gemeine Brüche:

$0{,}\overline{1} = \frac{1}{9}$; $0{,}\overline{5} = \frac{5}{9}$; $0{,}\overline{63} = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$; $5{,}\overline{123} = 5\frac{123}{999}$;

Achtung: Will man periodische Dezimalbrüche addieren, subtrahieren, multiplizieren oder dividieren, so muss man sie in gemeine Brüche (mit Bruchstrichschreibweise) verwandeln!

$0{,}\overline{4} \cdot 0{,}\overline{3}$ ist also nicht etwa $0{,}\overline{12}$, sondern $0{,}\overline{4} \cdot 0{,}\overline{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27} = 0{,}\overline{148}$;

Bemerkung: Alle Bruchzahlen bilden zusammen mit den ganzen Zahlen die Menge Q der rationalen Zahlen

Prozentangaben:

Prozente geben Bruchteile an. **„1 Prozent" bedeutet „1 Hundertstel":** **$1\% = \frac{1}{100}$**

Brüche kann man in leicht in Prozente verwandeln, wenn sich der Nenner auf 100 erweitern lässt, z.B. $\frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 15\ \%$. Ist dies nicht der Fall, so verwandelt man den Bruch durch Dividieren in einen Dezimalbruch und verschiebt anschließend das Komma um zwei Stellen nach rechts, z.B. $\frac{3}{19} = 3 : 19 = 0{,}1578947... = 15{,}78947..\% \approx 15{,}8\%$

Wichtige Umrechnungen: $1 = \frac{100}{100} = 100\%$

$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$	$\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6} = 16\frac{2}{3}\%$	$\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$
$\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$	$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 33\frac{1}{3}\%$	$\frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$
$\frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$	$\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6} = 66\frac{2}{3}\%$	$\frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

Grundwert – Prozentsatz – Prozentwert:

$$\underbrace{4\%}_{\text{Prozentsatz}} \text{ von } \underbrace{6000€}_{\text{Grundwert}} = \frac{4}{100} \cdot 6000€ = \underbrace{240€}_{\text{Prozentwert}}$$

Relative Häufigkeit:

Die relative Häufigkeit gibt an, welcher Bruchteil aller Ergebnisse Treffer sind.

$$\text{relative Häufigkeit } h = \frac{\text{Anzahl der Treffer } z}{\text{Anzahl der Ergebnisse } n}$$

Beispiel: Würfelt man 20-mal und tritt dabei 5-mal die Eins auf, so ist die relative Häufigkeit der Eins:

$$\frac{5}{20} = 0{,}25 = 25\%$$

Schlussrechnung (Dreisatz):

Die gesuchte Größe muss im 1. Satz <u>rechts</u> stehen!

Beispiel1: 5m Stoff kosten 12,50€. Wie viel kosten 7m?

5m kosten 12,50€

1m kostet $\frac{12{,}50€}{5}$

7m kosten $\frac{12{,}50€ \cdot 7}{5} = 17{,}50€$

Beispiel2: Um eine Grube auszuheben brauchen 2 Arbeiter 6h. Wie lange brauchen 3 Arbeiter?

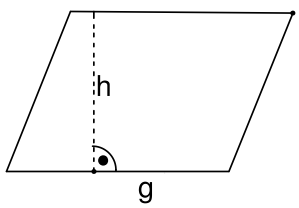
2 Arbeiter brauchen 6h

1 Arbeiter braucht $6h \cdot 2$

3 Arbeiter brauchen $\frac{6h \cdot 2}{3} = 4h$

Formeln für Flächeninhalte:

Parallelogramm

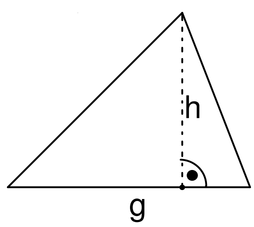


Parallelogrammfläche

= Grundseite mal Höhe

$A_P = g \cdot h$

Dreieck

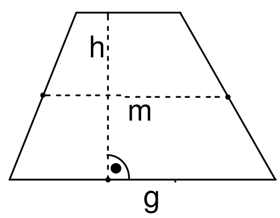


Dreiecksfläche = $\frac{1}{2}$ mal

Grundseite mal Höhe

$A_D = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{g \cdot h}{2}$

Trapez



Trapezfläche =

Mittellinie mal Höhe

$A_T = m \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$

Volumen (=Rauminhalt):

Volumeneinheiten sind mm^3; cm^3; dm^3(=Liter); m^3;

Die Umrechnungszahl für Volumeneinheiten ist **1000** (z.B. $1cm^3 = 1000mm^3$)

(Ausnahme: 1 Hektoliter =100 Liter)

Volumen des Quaders:

Ein Quader mit den Kantenlängen l, b und h

hat das Volumen $\mathbf{V_Q = l \cdot b \cdot h}$

Volumen des Würfels:

Ein Würfel mit der Kantenlänge a

hat das Volumen $\mathbf{V_W = a \cdot a \cdot a = a^3}$